Spazi vettoriali/1

(1) Per ciascuno dei seguenti spazi dire se è o meno uno spazio vettoriale (spiegare)

(a) $[0, \infty)$
(b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2 = 0\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2\}$
(e) $\{A \in M_{n\times n} : a_{ij} \geq 0,\ \forall i, j\}$
(f) L'insieme di tutte le matrici $n \times n$ a coefficienti interi
(g) L'insieme di tutte le matrici $n \times n$ diagonali
(h) L'insieme dei polinomi di grado non superiore a 4
(i) L'insieme dei polinomi di grado non inferiore a 4
(j) L'insieme dei polinomi che si annullano in $x = 1$
(k) L'insieme dei polinomi p tali che $p(1)$ è un intero pari
(l) $C^3(\mathbb{R})$, vale a dire l'insieme delle funzioni reali con derivata terza continua.

(2) Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(a) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = 2|x_1| + |x_3|$
(b) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = x_1 + 2x_2 + x_3$
(c) $L = \ell_2$ e $\|x\| = \sup_i |x_i|$
(d) $L = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$
(e) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + 2|x_2| + 5|x_3|$

(3) Disegnare la sfera unitaria $\|x\|_p = 1$ in $\mathbb{R}^2$ per $p = 1, 1.5, 2, 3, \infty$

(4) Usando la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz dimostrare che se $x \in \mathbb{R}^n$ allora

$$(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

ovvero che $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$.

(5) Usando la disuguaglianza di Hölder dimostrare che se $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ allora

$$\|x\|_1 \leq n^{1/q}\, \|x\|_p \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

(6) Sia n_0 un intero e sia f una funzione continua positiva e *non crescente* su $[n_0, \infty)$. Dimostrare che

(1) per ogni intero $N > n_0$, si ha

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(x)\, dx$$

(2) la serie $\sum_{n_0}^{\infty} f(k)$ converge se e solo se l'integrale $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$ è finito.

(7) Per quali valori di α le seguenti successioni appartiengono a ℓ_2?

$$(a)\ \ x_n := \frac{1}{[\log(1+n)]^\alpha} \qquad (b)\ \ x_n := \frac{1}{n^\alpha} \qquad (c)\ \ x_n := n^\alpha\, e^{-\sqrt{n}}$$

(8) Dimostrare che se $1 \leq p < q$ allora $\ell_p \subset \ell_q$. (Sugg: se $x \in \ell_p$ allora x converge a zero, quindi ...)

(9) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione

$$x_k = \frac{1}{k^\alpha}$$

appartiene agli spazi ℓ_f? ℓ_p? ℓ_0? ℓ_∞?

(10) Sia $(x^{(n)})$ una successione di elementi di ℓ_1. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty = 0$$

Far vedere che l'inverso è falso, trovando un esempio di una successione $(x^{(n)})$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty = 0 \qquad \text{ma} \qquad \lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 \neq 0\,.$$

(11) Fare un esempio di una successione x che appartiene a ℓ_4 ma non a ℓ_3.

Spazi vettoriali/2

(1) Per ciascuno dei seguenti spazi dire se è o meno uno spazio vettoriale (spiegare)

(a) L'insieme dei polinomi $p \in P(\mathbb{R})$ che hanno tutte le radici reali
(b) L'insieme delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $5y'' + y' + y = 0$
(c) L'insieme delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $5y'' + y' + y = x$
(d) L'insieme delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y' + y \sin x = 0$

(2) Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(a) $L = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = |f(0)|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$
(b) $L = C_1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$
(c) $L = C_c(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$
(d) $L = C_1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$
(e) $L = C^1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = |f(3)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$
(f) $L = C^3[a,b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
(g) $L = C^3[a,b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$
(h) $L = C^3[a,b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$
(i) $L = C^3[a,b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
(j) $L = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$
(k) $L = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+x^2}\, dx$

(3) Data la seguente successione di successioni, calcolare le quantità $\|x^{(2)}\|_\infty$ e $\|x^{(5)}\|_3$

$$x_k^{(n)} := \frac{n^2}{2^{n+k}} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(4) Consideriamo la successione di successioni $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ data da

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

Calcolare $\|x^{(1)}\|_\infty$, $\|x^{(4)}\|_\infty$, $\|x^{(8)}\|_1$ e $\|x^{(n)}\|_4$.

(5) Fare un esempio di una successione $(x^{(n)})$ di elementi di ℓ_∞ che converge puntualmente (componente per componente) a zero, ma non converge in norma, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty \ne 0\,.$$

(6) Definire una norma su $P(\mathbb{R})$. (Sugg: non si può definire la norma $\|p\|_u := \sup_{x\in\mathbb{R}} |p(x)|$, perchè i polinomi non sono limitati e questa norma potrebbe essere infinita, però si potrebbe definire $\|p\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\,?\,|$)

(7) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f appartiene a $C_1(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\|\,f\|_1 < \infty$).

$$(a)\quad f(x) := \frac{1}{(2+x^4)^\alpha} \qquad (b)\quad f(x) := \frac{(1+|x|)^\alpha}{e^{|x|}} \qquad (c)\quad f(x) := \frac{\exp\left[\left[\log(1+x^2)\right]^2\right]}{1+|x|^\alpha}$$

☆ (8) Trovare una funzione $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitata.

(9) Dimostrare direttamente, senza usare la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, che se $f, g \in C_2(\mathbb{R})$ il loro prodotto fg appartiene a $C_1(\mathbb{R})$.

(10) Fare un esempio di una funzione f che appartiene a $C_2(\mathbb{R})$ ma non a $C_1(\mathbb{R})$.

☆Non ultra–facilissimo

Spazi vettoriali/3

(1) Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(a) $L = \mathbb{R}^2$ e $\|x\| = |x_1 - x_2|$
(b) $L = \mathbb{R}^2$ e $\|x\| = |x_1| + |x_1 - x_2|$

(2) Dimostrare che, se $f \in C[a, b]$, e $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ allora

$$\|f\|_1 \le |b - a|^{1/q} \, \|f\|_p$$

(3) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione indicata appartiene a $C_p(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty$).

$$(a)\ \frac{x \sin x}{(1 + x^2 + x^4)^\alpha} \qquad (b)\ \frac{[\log(1 + x^2)]^\alpha}{1 + x^2} \qquad (c)\ e^{-|x|^\alpha} \qquad (d)\ \frac{|x|^\alpha}{1 + x^8}$$

Risp: (a) $\alpha > \frac{1}{4} + \frac{1}{4p}$. (b) $\alpha \in \mathbb{R}$. (c) $\alpha > 0$. (d) $0 \le \alpha < 8 - \frac{1}{p}$.

(4) Dimostrare che $C_1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_2(\mathbb{R})$.

(5) Per ciascun insieme di vettori dire se sono linearmente indipendenti o dipendenti e dimostrarlo

(1) in $\mathbb{R}^3$ i vettori $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$
(2) in $\mathbb{R}^3$ i vettori $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1)$
(3) in $C(\mathbb{R})$ le funzioni $x^2, \sin x, \cos x$
(4) in $C(\mathbb{R})$ le funzioni $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$
(5) in $C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (le funzioni reali continue a valori complessi, considerato come spazio vettoriale complesso) le funzioni $e^{ix}, e^{-ix}, \sin x$

(6) Descrivere a parole i seguenti sottospazi generati (i vettori $e^{(n)}$ sono i soliti vettori di base $e^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ in cui l'unico 1 appare alla posizione n)

(a) In $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{e^{(1)}\}$
(b) In $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{e^{(1)}, e^{(2)}\}$
(c) In $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$
(d) In $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$
(e) In $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$
(f) In $\mathbb{R}^\infty$, $\operatorname{span}\{e^{(n)} : n = 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
(g) In $C(\mathbb{R})$, $\operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3\}$
(h) In $C(\mathbb{R})$, $\operatorname{span}\{(x^k)_{k=0}^\infty\}$

(7) Sia (X, d) uno spazio metrico e siano Y, Z 2 sottoinsiemi di X tali che $Z \subset Y \subset X$. Dimostrare che se Z è denso in Y e Y è denso in X allora Z è denso in X.

☛ (8) Dimostrare che ℓ_f è denso in $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ (di conseguenza i vettori unitari canonici $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots$ sono una base in questo spazio).

(9) Dimostrare che ℓ_f non è denso in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

(10) Nello spazio vettoriale normato $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ si consideri la funzione $f(x) := 1/(1+x^2)$. Determinare una funzione $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $\|f - g\|_u \le 1/10$. Disegnare il grafico di f e g.

☞ (11) Dimostrare che lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$, ma non in $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$.

☛ Vedi la soluzione di un problema analogo sulle note
☞ Più o meno svolto nelle note

Spazi vettoriali/4

(1) Calcolare $\sum_{k=0}^{37} \binom{37}{k}$. (Sugg: usare l'identità...)

Risp: 137438953472

(2) Trovare una funzione $f \in C(\mathbb{R})$ che cresce, quando $x \to +\infty$, più velocemente di qualunque potenza, ma più lentamente di $\exp(|x|^a)$ per ogni $a > 0$.

(3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare e^A e verificare che $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$. (Sugg: conviene diagonalizzarla).

Risp: $\begin{pmatrix} -2\,e + 3\,e^2 & -2\,e + 2\,e^2 \\ 3\,e - 3\,e^2 & 3\,e - 2\,e^2 \end{pmatrix}$

(4) Consideriamo la successione di successioni $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ data da

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} 1/n & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

Scrivere i primi 7 termini di $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. Calcolare $\|x^{(1)}\|_\infty$, $\|x^{(4)}\|_2$, $\|x^{(n)}\|_p$.

(5) Nello spazio $C_b^1(\mathbb{R})$ trovare una successione di funzioni f_n tali che $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_u = 0$, ma al tempo stesso, se considero una norma diversa,

$$\|f\| = \|f\|_u + \|f'\|_u$$

ottengo $\|f_n\| \not\to 0$.

(6) Dimostrare che $P[0,1]$ non è chiuso in $(C[0,1], \|\cdot\|_u)$. (Ovvero trovare una funzione su $[0,1]$ che non sia un polimonio, ma che sia limite uniforme di polinomi. Sugg: ricordarsi di quello che dice T.)

(7) Sapendo che ℓ_f è denso sia in $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty)$ che in $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ per ogni $p \ge 1$, e usando il fatto che ℓ_0 è chiuso in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, identificare i seguenti insiemi:

(a) la chiusura di ℓ_2 in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$
(b) la chiusura di ℓ_1 in $(\ell_4, \|\cdot\|_\infty)$
(c) la chiusura di ℓ_1 in $(\ell_4, \|\cdot\|_4)$
(d) la chiusura di ℓ_3 in $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty)$

☞ (8) Dimostrare che $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ è completo.

☞ (9) Dimostrare che $(\ell_f, \|\cdot\|_\infty)$ non è completo.

(10) Dimsotrare che $\ell_f(\mathbb{Q})$ è numerabile (Sugg: scrivere $\ell_f(\mathbb{Q})$ come unione numerabile di insiemi numerabili ...).

☞ (11) Dimostrare che $\ell_f(\mathbb{Q})$ è denso in $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty)$. (Sugg: dimostrare che $\ell_f(\mathbb{Q})$ è denso in $\ell_f(\mathbb{R})$ ed usare il fatto noto che $\ell_f(\mathbb{R})$ è denso in ℓ_0).

(12) Dimostrare che $\ell_f(\mathbb{Q})$ è denso in $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. (Sugg: serve una piccola variazione rispetto al problema precedente).

☆ (13) Dimostrare la seguente affermazione: sia (X, d) uno spazio metrico e supponiamo che X contenga un insieme non numerabile di elementi $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ tale che per ogni $\alpha \ne \beta$ si ha $d(x_\alpha, x_\beta) \ge \frac{1}{10}$. Allora X non è separabile.

☞Più o meno svolto nei Rudimenti o sul sito
☆Non ultra–facilissimo