

2 Spazi metrici

Es 2.1. Siano $S = \mathbb{C}$ e $d(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Dimostrare che (\mathbb{C}, d) è uno spazio metrico. Disegnare $B(1 + i3, 1)$.

Es 2.2. Siano $S = \mathbb{C}$ e $d(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$. Dimostrare che (\mathbb{C}, d) è uno spazio metrico. Disegnare $\overline{B}(3 + i, 2)$.

Es 2.3. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{C} sono aperti e quali sono chiusi

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ con } n \text{ intero } \geq 1\}$

(c) l'asse reale (d) $\{z \in \mathbb{C} : z \text{ è reale } 0 \leq z \leq 1\}$

Es 2.4. Definire matematicamente un sottoinsieme di \mathbb{C} che non sia né aperto né chiuso.

Es 2.5. Dimostrare le seguenti affermazioni (se vere) o mostrare un controesempio (se false)

- Un insieme aperto di un qualsiasi spazio metrico ha cardinalità infinita (cioè possiede un numero infinito di punti)
- $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- L'intersezione di una infinità numerabile di aperti è un aperto
- L'unione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso

Es 2.6. Dimostrare che un insieme $G \subset (S, d)$ è aperto se e solo se $S - G$ è chiuso.

Es 2.7. Sia $A \subset (S, d)$. Dimostrare le seguenti relazioni

(a) $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ (b) $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$ (c) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

Es 2.8. Esiste in sottoinsieme A di \mathbb{C} tale che $A^\circ = \emptyset$ e $\overline{A} = \mathbb{C}$?

Es 2.9. Siano A_1, A_2, \dots, A_n sottoinsiemi dello spazio metrico (S, d) , dimostrare che

(a) se A_1, A_2, \dots, A_n sono chiusi allora $\bigcup_{k=1}^n A_k$ è un chiuso

(b) se A_1, A_2, \dots, A_n sono aperti allora $\bigcap_{k=1}^n A_k$ è un aperto

Es 2.10. Sia A un sottoinsieme dello spazio metrico (S, d) . Dimostrare che A è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti limite.

Es 2.11. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente nello spazio metrico (S, d) . Dimostrare che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy.

Es 2.12. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy nello spazio metrico (S, d) che ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente in (S, d) . Dimostrare che $\{x_n\}$ è convergente in (S, d) .

Es 2.13. Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni convergenti nello spazio metrico (\mathbb{C}, d) , con $d(z, w) = |z - w|$, rispettivamente a x e y . Dimostrare che $\{x_n + y_n\}$ è una successione convergente in (\mathbb{C}, d) a $x + y$.