Spazi di Hilbert/1

(1) Indicando con A^T la trasposta della matrice A, dimostrare che, se A è invertibile, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(2) Dire se la seguente espressione è un prodotto scalare in ℓ_2 o meno. Dimostrare ciò che si afferma.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i\, y_{i+1} + x_{i+1}\, y_i)$$

(3) Dimostrare che

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}(5\, x_i\, y_i + x_i\, y_{i+1} + x_{i+1}\, y_i)$$

è un prodotto scalare in ℓ_2.

(4) Dire se la seguente espressione è un prodotto scalare nello spazio $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dimostrare ciò che si afferma (A^t è la trasposta di A).

(a) $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB)$ $\qquad$ (b) $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^t B)$

☞ (5) Sia $p \geq 1$. Dimostrare che se $p \neq 2$ non esiste alcun prodotto scalare su ℓ_p compatibile con la norma $\|\cdot\|_p$.

(6) Dimostrare che non esiste alcun prodotto scalare in $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ (Sugg: si cerchino 2 funzioni che violano la regola del parallelogramma).

☞ (7) Dimostrare che se $(\mu)_{k=1}^{\infty}$ è una successione reale positiva, lo spazio "pesato"

$$\ell_2(\mu) := \left\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\, x_i^2 < \infty\right\}$$

è uno spazio vettoriale e che

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i x_i y_i$$

è un prodotto scalare.

(8) Dimostrare che se p è una funzione continua positiva, lo spazio "pesato"

$$C_2(\mathbb{R}, p\, dx) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 p(x)\, dx < \infty\}$$

è uno spazio vettoriale e che

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)p(x)\, dx$$

è un prodotto scalare (più o meno uguale al precedente).

☞ (9) Dimostrare che l'*addizione*, la *moltiplicazione per uno scalare* e il *prodotto scalare* sono continui in uno spazio euclideo, vale a dire si assuma che $u_n \to u$ e che $v_n \to v$ e si dimostri che

(1) $u_n + v_n \to u + v$
(2) se $c \in \mathbb{R}$ allora $cu_n \to cu$
(3) $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$

(10) Sapendo che $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 1$ (come si dimostra?), dimostrare che per ogni intero positivo n si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, x^{2n}\, dx = (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, x^{2n-1}\, dx = 0$$

☞ (11) (Polinomi di Legendre). Usando la procedura di Gram–Schmidt, trovare un sistema ortonormale p_0, p_1, p_2, p_3 in $C_2[-1, 1]$, a partire dal seguente sistema di vettori linearmente indipendenti:

$$v_0(x) = 1,\ v_1(x) = x,\ v_2(x) = x^2,\ v_3(x) = x^3,\ v_4(x) = x^4$$

☞ Più o meno svolto nei Rudimenti o sul sito

Spazi di Hilbert/2

(1) Sia $P(N,\varepsilon)$ una proprietà che dipende da N e ε. Spiegare chiaramente la differenza fra le seguenti affermazioni:

(1) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N tale che vale la proprietà $P(N,\varepsilon)$.
(2) Esiste un intero positivo N tale che per ogni $\varepsilon > 0$ vale la proprietà $P(N,\varepsilon)$.

(2) Determinare gli autovalori delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Definisco $f \prec g$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$. Ordina le seguenti funzioni in ordine crescente rispetto alla relazione $\prec$.

$$(\log x)^2 \qquad \log(x^4) \qquad x^{1/4} \qquad \sin(e^x) \qquad (\log\log x)^4 \qquad \log[(\log x)^4] \qquad e^{[(\log x)^4]}$$

(4) Trova una matrice A 3×3 tale che $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$ e $A^3 = 0$.

(5) Quale condizione deve soddisfare una matrice $n\times n$ A, affinchè la seguente espressione sia un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$?

$$\langle u, v\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, u_i v_j \qquad u, v \in \mathbb{R}^n$$

(6) Usando la procedura di Gram–Schmidt, trovare un sistema ortonormale p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 in $C_2[0,1]$, a partire dal seguente sistema di vettori linearmente indipendenti:

$$v_0(x) = 1,\ v_1(x) = x,\ v_2(x) = x^2,\ v_3(x) = x^3,\ v_4(x) = x^4$$

(7) Nello spazio $C_2[0,1]$ decomporre il vettore $v(x) = x^5$ come somma

$$v = w + z$$

in cui $w \in \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$ e $z \perp \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$ (Sugg: conviene utilizzare il risultato dell'esercizio precedente).

(8) (Polinomi di Hermite). Ortogonalizzare i polinomi: $1, x, x^2, x^3$ nello spazio euclideo pesato $C_2(\mathbb{R}, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx)$.

(9) Sia $A = (A_{ij})$ una matrice infinita tale che

(a) $A_{ij} = A_{ji}$ per ogni i, j
(b) esiste $M > 0$ tale che $0 < A_{ii} < M$ per ogni i
(c) per ogni i si ha $\sum_{j\neq i} |A_{ij}| < A_{ii}$

Dimostrare che l'espressione

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}\, x_i\, y_j$$

è un prodotto scalare in ℓ_2.

(10) Sia π_W la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso W. Dimostrare che

(1) π_W è un operatore lineare, vale a dire $\pi_W(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\pi_W(v_1) + a_2\pi_W(v_2)$ per ogni $a_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in L$.
(2) $\pi_W^2 = \pi_W$, cioè $\pi_W(\pi_W(v)) = \pi_W(v)$
(3) π_W è simmetrico, cioè $\langle \pi_W v, z\rangle = \langle v, \pi_W z\rangle$ per ogni $v, z \in L$.
(4) Se W e Z sono due sottospazi chiusi di L mutuamente ortogonali, allora $\pi_W \circ \pi_Z = 0$.
(5) Se W e Z sono due sottospazi chiusi di L tali che $W \subset Z$, allora $\pi_W \circ \pi_Z = \pi_Z \circ \pi_W = \pi_W$.

(11) Nello spazio di Hilbert ℓ_2 sia

$$\begin{aligned} X &:= \{x \in \ell_2 : x_n = 0 \text{ per tutti gli } n \text{ dispari}\} \\ W &:= \{x \in \ell_2 : x_{2n} = x_{2n-1} \text{ per ogni } n = 1, 2, \ldots\} \\ Z &:= \{x \in \ell_2 :\ |x_1| \geq |x_2| \geq |x_3| \geq \cdots\}. \end{aligned}$$

Determinare $X^\perp$, $W^\perp$, $Z^\perp$.

Spazi di Hilbert/3

(1) Calcolare $\sum_{k=0}^{41} \binom{41}{k}(-1)^k$.

(2) (Polinomi trigonometrici). Dimostrare che il sistema di funzioni

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin(2x),\ \cos(2x),\ \sin(3x),\ \cos(3x),\ \ldots$$

è ortogonale in $C_2[0, 2\pi]$.

(3) Sia π_W il proiettore ortogonale sul sottospazio chiuso W dello spazio di Hilbert $(V, \|\cdot\|)$. Dimostrare che $\langle u, \pi_W u\rangle \geq 0$ per ogni $u \in V$.

(4) Sia $L = \mathbb{R}^n$ e sia $u \in \mathbb{R}^n$. Poniamo $\pi_u := \pi_{\mathrm{span}\{u\}}$, per cui abbiamo

$$\pi_u v = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}\, u$$

Dimostrare che l'operatore π_u è rappresentato, nella base canonica di $\mathbb{R}^n$ dalla matrice A con elementi

$$A_{ij} = \frac{u_i\, u_j}{\|u\|^2} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

☞ (5) Sia $L = \mathbb{R}^4$ e sia

$$v_1 = (1, 1, 0, 0) \qquad v_2 = (0, 1, 1, 0) \qquad W = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$$

Determinare la matrice 4×4 A che rappresenta π_W nella base canonica. Verificare che $A^2 = A$.

(6) Sia $L = C_2[0, 1]$ e $W = \mathrm{span}\{1, x\}$. Determinare il nucleo dell'operatore π_W, vale a dire determinare $K(x, y)$ tale che

$$(\pi_W f)(x) = \int_0^1 K(x, y)\, f(y)\, dy$$

Verificare che

$$\int_0^1 K(x, y)K(y, z)\, dy = K(x, z)\,.$$

Calcolare $\pi_W x^2$ e verificare che $x^2 - \pi_W(x^2)$ è ortogonale a $\mathrm{span}\{1, x\}$.

☞ (7) Sia $L = C_2[0, 1]$ e $W = \mathrm{span}\{x, x^3\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x, y)$ dell'operatore π_W. Verificare che

$$\int_0^1 K(x, y)K(y, z)\, dy = K(x, z)\,.$$

Calcolare $\pi_W x^2$ e verificare che $x^2 - \pi_W(x^2)$ è ortogonale a W.

(8) Sia $L = C_2[0, 1]$ e $W = \mathrm{span}\{1, x^2\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x, y)$ dell'operatore π_W. Calcolare $\pi_W x^3$.

(9) Dimostrare che l'ipotesi di completezza è necessaria nel teorema di Riesz–Fisher. (Trovare uno spazio euclideo V non completo, un sistema ortonormale (u_k) in V e una successione $(c_k) \in \ell_2$ tale che la sommatoria $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ non converge ad alcun elemento $v \in V$).

★ (10) Trovare uno spazio euclideo V e un sistema ortonormale $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ non completo in V, tale che non esista alcun vettore $v \neq 0$ ortogonale a tutti gli u_k. (Sugg: la cosa è possibile sole se V non è completo. Si prenda come V il sottospazio di ℓ_2 definito come $V := \mathrm{span}\{x, e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots\}$, in cui $x = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$ e gli $e^{(n)}$ sono i vettori di base "canonici". Si consideri poi il sistema ortonormale $\{e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}, \ldots\}$. È ovvio che non è completo. Nonostante ciò si assuma che y sia un elemento di V ortogonale a tutti gli $e^{(n)}$ per $n = 2, 3, 4, \ldots$ e si dimostri che deve essere necessariamente $y = (0, 0, 0, \ldots)$.)

☞ Più o meno svolto nei Rudimenti o sul sito