Serie e trasformata di Fourier/1

(1) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ le funzioni

$$(a) \qquad f(x) = \operatorname{sgn}(x) \qquad\qquad (b) \qquad f(x) = x \qquad\qquad (c) \qquad f(x) = |x|$$

Usando l'uguaglianza di Parseval, dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\big(\pi \coth \pi - 1\big)$$

(3) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione $f(x) = x^2$, ed utilizzare il risultato per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(4) Sapendo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-\pi, -\pi + a] \\ 0 & \text{per } x \in (-\pi + a, \pi - a) \\ 1 & \text{per } x \in [\pi - a, \pi] \end{cases}$$

con $0 < a < \pi$, ammette lo sviluppo di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(na)}{n} \cos(nx)$$

(verificarlo!), utilizzare l'identità di Parseval per dimostrare che

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{a\pi} \sum \frac{\sin^2(na)}{n^2} = 1.$$

(5) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{per } x \in (0, \pi] \\ -\pi - x & \text{per } x \in [-\pi, 0) \end{cases}.$$

Verificare che nel punto $x = 0$ la serie converge a $[f(0^+) + f(0^-)]/2$.

(6) **OAQ. Prima puntata**. Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni f infinitamente derivabili tali che per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ e per ogni k intero positivo si ha

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k f^{(n)}(x) < \infty\,.$$

In altre parole f e tutte le derivate di f vanno a zero all'infinito più velocemente di ogni potenza. Introduciamo in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ il prodotto scalare usuale $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$. Consideriamo gli operatori lineari (non limitati)

$$(Df)(x) := f'(x) \qquad (Xf)(x) := x\,f(x) \qquad A_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(X + D) \qquad A_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(X - D)$$

(a) Dimostrare che $D^* = -D$, $X^* = X$, $A_-^* = A_+$.

(b) Dimostrare che $[D, X] = I$, in cui $[D, X](f) = DXf - XDf$ è il commutatore fra D ed X.

(c) Dimostrare che $[A_-, A_+] = I$.

(d) Sia $N := A_+ A_-$. Dimostrare che N è autoaggiunto e definito positivo, vale a dire che $\langle Nf, f\rangle \geq 0$ per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(e) Dimostrare che se λ è un autovalore di N allora $\lambda \geq 0$.

Serie e trasformata di Fourier/2

(1) Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ sia S_n la somma parziale n–esima della serie di Fourier associata. Calcolare il limite $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

$$(a)\ \ f(x) = x \qquad (b)\ \ f(x) = e^x \qquad (c)\ \ f(x) = x^2 \qquad (d)\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 - x/\pi & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Risp: (a) $S(x) = x$ se $x \in (-\pi, \pi)$, $S(-\pi) - S(\pi) = 0$.

(2) Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h.

(3) Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $[0, \pi]$ utilizzando (1) soltanto i coseni (2) soltanto i seni. Dire, in ciascun caso, per quali valori di $x \in [0, \pi]$ la serie di Fourier considerata converge ad f.

$$(a)\ \ f(x) = 1 \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = \sin x \qquad\qquad (c)\ \ f(x) = x^2$$

Risp: (a1) $1 = 1$. (a2) $1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin[(2k+1)x]$. (b1) $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$. (b2) $\sin x = \sin x$. (c1) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$. (c2) $x^2 = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} - 2\frac{1-(-1)^k}{(k\pi)^3} \right] \sin(kx)$.

(4) **OAQ. Seconda puntata**. [Riassunto delle puntate precedenti: nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vengono introdotti, senza motivo apparente, degli strani operatori e ne vengono studiate alcune proprietà].

(f) Verificare che $[N, A_-] = -A_-$ e che $[N, A_+] = A_+$.

(g) Sia u_λ un autovettore di N con autovalore λ. Dimostrare che

 (i) $\|A_+ u_\lambda\| = \sqrt{\lambda + 1}\|u_\lambda\|$ e $\|A_- u_\lambda\| = \sqrt{\lambda}\|u_\lambda\|$.

 (ii) $A_+ u_\lambda$ è un autovettore di N con autovalore $\lambda + 1$.

 (iii) Se $\lambda \neq 0$, $A_- u_\lambda$ è un autovettore di N con autovalore $\lambda - 1$.

(h) Dedurre dai punti (e) e (iii) che gli autovalori di N devono essere necessariamente interi non negativi.

(j) Supponiamo che N abbia almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{N}$. Dedurre dai punti (ii), (iii) e (h) che l'insieme degli autovalori di N è proprio l'insieme $\mathbb{N}$ di tutti i naturali.

(k) Verificare che $e^{-x^2/2}$ è un autovettore di N. Concludere che $\sigma_p(N) = \mathbb{N}$.

Serie e trasformata di Fourier/3

(1) Trovare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$(a)\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } |x|\le 1\\ 0 & \text{se } |x|>1\end{cases}\qquad\qquad (b)\quad f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & \text{se } |x|\le \pi\\ 0 & \text{se } |x|>\pi\end{cases}$$

$$(c)\quad f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{se } |x|\le \frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{se } |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad\qquad (d)\quad f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{se } |x|\le \pi\\ 0 & \text{se } |x|>\pi\end{cases}$$

$$(e)\quad f(x)=\begin{cases}e^{|x|} & \text{se } |x|\le \pi\\ 0 & \text{se } |x|>\pi\end{cases}$$

(2) Trovare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$(a)\quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}\qquad\qquad (b)\quad f(x)=\frac{1}{x^4+1}.$$

[Suggerimento. Utilizzare il teorema dei residui chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore della variabile complessa $z=x+iy$ per $\lambda>0$, e nel semipiano superiore per $\lambda<0$].

(3) Sia $f\in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e sia $g(\lambda):=\mathcal{F}[f](\lambda)$. Dimostrare le seguenti identità:

$$\mathcal{F}[f(x)\,e^{iax}](\lambda)=g(\lambda-a)\qquad\qquad a\in\mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}[f(x)\,\cos(ax)](\lambda)=\frac{1}{2}\,[g(\lambda+a)+g(\lambda-a)]\qquad\qquad a\in\mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}[f(a\,x)](\lambda)=\frac{1}{|a|}\,g(\lambda/a)\qquad\qquad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

(4) Sia $\mathcal{F}$ l'operatore lineare che opera la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\lambda):=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

Considerando $\mathcal{F}$ come un operatore dallo spazio $(L_1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ nello spazio $(C_0(\mathbb{R}),\|\cdot\|_u)$, dimostrare che $\|\mathcal{F}\|=1$.

(5) Sia $a>0$ e

$$f(x):=\begin{cases}\cos x & \text{se } x\in[-a,a]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

(a) Calcolare la trasformata di Fourier $g=\mathcal{F}[f]$ di f.
(b) Determinare i valori del parametro a per i quali $g(\lambda)$ tende a zero, quando $\lambda\to\infty$, *più velocemente* di $1/\lambda$ (in realtà come $1/\lambda^2$).
(c) Spiegare il perchè del punto precedente

☞ (6) Sia g la trasformata di Fourier della funzione f. Cosa si può affermare, nei casi seguenti, sul grado di derivabilità di g senza doverla calcolare?

$$(a)\quad f(x)=x^7e^{-\sqrt{|x|}}\qquad\qquad (b)\quad f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}\qquad\qquad (c)\quad f(x)=\frac{1}{1+|x|^3}$$

☞Più o meno svolto nelle note