Operatori Lineari/1

(1) Sia V uno spazio di Hilbert. $U \in \mathcal{L}(V)$ è detta una *isometria* se $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in V$. Dimostrare che U è un'isometria se e solo se $\|Ux\| = \|x\|$ per ogni $x \in V$.

(2) Sia ϑ_+ (traslazione verso destra) l'operatore lineare su ℓ_1 definito, se $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ come

$$\vartheta_+ x = \vartheta_+(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Determinare $\|\vartheta_+\|$, $\operatorname{Ker}\vartheta_+$ e $\operatorname{Ran}\vartheta_+$.

(3) Sia ϑ_- (traslazione vesro sinistra) l'operatore lineare su ℓ_1 definito, se $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ come

$$\vartheta_- := (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Determinare $\|\vartheta_-\|$, $\operatorname{Ker}\vartheta_-$ e $\operatorname{Ran}\vartheta_-$.

☞ (4) Sia K una funzione continua su $[a, b] \times [a, b]$. Sia T l'operatore su $C_2[a, b]$ definito come

$$Tf(x) := \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy\,.$$

Dimostrare che T è limitato e trovare un limite superiore alla norma di T.

(5) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$ fissata e sia T l'operatore lineare su $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ definito come

$$Tf(x) = g(x)f(x)$$

Calcolare $\|T\|$.

(6) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$ fissata e sia T l'operatore lineare su $(C_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ definito come

$$Tf(x) = g(x)f(x)$$

Calcolare $\|T\|$.

(7) Siano g, h due funzioni continue fissate su $[a, b]$ e sia T l'operatore lineare su $C_2[a, b]$ definito come

$$Tf(x) = \left[\int_a^b h(y)\, f(y)\, dy\right] g(x)$$

(a) Determinare $\|T\|$, $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Ran} T$.
(b) Assumendo $g \perp h$, calcolare T^2

☞Più o meno svolto nelle note

Operatori Lineari/2

(1) Sia $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormale in uno spazio di Hilbert V. Dimostrare che per ogni $v, w \in V$ si ha

$$\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, u_k\rangle \langle u_k, w\rangle$$

(2) Siano A, B due operatori lineari nello spazio vettoriale V. Assumendo $AB = I$, quali delle seguenti proprietà sono necessariamente vere?

(a) A è iniettivo (b) B è iniettivo (c) A è suriettivo (d) B è suriettivo

(3) Siano A, B due operatori lineari limitati nello spazio di Banach V e sia $C = AB$. Dimostrare che $\operatorname{Ker} C \supset \operatorname{Ker} B$ e che $\operatorname{Ran} C \subset \operatorname{Ran} A$.

(4) Sia A un operatore lineare continuo invertibile nello spazio di Banach V. Dimostrare che $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$.

(5) Trovare due operatori lineari limitati in uno spazio di Banach V tali che $AB = I$, ma $BA \neq I$ (quindi B non è l'inverso di A).

☞ (6) Sia T è un operatore lineare invertibile da V in Z. È vero che se T è limitato allora T^{-1} è limitato?

☞ (7) Sia V uno spazio di Banach. Dimostrare che $\mathcal{L}(V)$ (l'insieme degli operatori lineari limitati su V) è uno spazio completo (usando la usuale norma operatoriale).

☞ (8) Nello spazio $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ consideriamo l'operatore lineare T definito come $(Tf)(x) := xf(x)$.

(a) Dimostrare che T non è limitato.
(b) Determinare il nucleo e l'immagine di T.

(9) Sia $C^{\infty}[a, b]$ l'insieme delle funzioni $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ infinitamente differenziabili nell'intervallo aperto (a, b) e tali che le quantità

$$\lim_{x\to a^+} f^{(n)}(x) \qquad \lim_{x\to b^-} f^{(n)}(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

esistono e sono finite. Sia $D = d/dx$ l'operatore di derivazione nello spazio $(C^{\infty}[0, 1], \|\cdot\|_u)$. Dimostrare che D non è limitato.

(10) Sia T un operatore lineare limitato autoaggiunto nello spazio di Hilbert V. Sia W un sottospazio di V *invariante* sotto T, vale a dire tale che $TW \subset W$. Dimostrare che anche $W^{\perp}$ è invariante sotto T.

(11) Sia V uno spazio euclideo e sia $T \in \mathcal{L}(V)$ autoaggiunto. Dimostrare che se $\langle Tx, x\rangle = 0$ per ogni $x \in V$ allora $T = 0$

(12) Dimostrare che in ℓ_2 vale $\vartheta_+^* = \vartheta_-$.

☞ (13) Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx := (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \ldots)$$

(a) Determinare T^*, vale a dire scrivere esplicitamente $T^*x = (?, ?, \ldots)$
(b) Determinare $\|T\|$, $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Ran} T$.

☞Più o meno svolto nelle note

Operatori Lineari/3

☞ (1) Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx := \left(x_1 + \frac{x_2}{2},\, x_3 + \frac{x_4}{4},\, x_5 + \frac{x_6}{6}, \dots\right).$$

Determinare: (a) T^*, (b) $\operatorname{Ker} T$, (c) $\operatorname{Ran} T$.

(2) Nello spazio $C_2([a,b];\mathbb{C})$ sia T l'operatore lineare integrale con nucleo $K(x,y)$. Determinare il nucleo integrale di T^*.

(3) Consideriamo l'operatore lineare $T := -D^2$ (in cui D è l'operatore derivata) che agisce sullo spazio euclideo $(C^\infty[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(a) Detrminare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Ran} T$.
(b) Sia $C_0^\infty[a,b]$ l'insieme delle funzioni $f \in C^\infty[a,b]$ tale che $f(a) = f(b) = 0$. Dimostrare che T è simmetrico e definito positivo sul dominio sul dominio $C_0^\infty[a,b]$, vale a dire che

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle \qquad \langle Tf, f\rangle \geq 0 \qquad \forall f, g \in C_0^\infty[a,b]$$

(4) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert. Dimostrare che se P è una proiezione ortogonale in V allora,

(1) $(I-P)v$ è ortogonale a Pv
(2) $\|Pv\| \leq \|v\|$
(3) $\operatorname{Ran} P = \operatorname{Ker}(I-P)$

(5) Sia P una proiezione ortogonale nello spazio di Hilbert V. Dimostrare che $\langle Px, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in V$.

(6) Siano $(u_k)_{k=1}^n$ e $(w_k)_{k=1}^n$ 2 ennuple ortonormali nello spazio di Hilbert V e siano $c_1, \dots, c_n$ numeri reali positivi. Dato l'operatore

$$Tv := \sum_{k=1}^n c_k \langle v, u_k\rangle\, w_k \qquad v \in V$$

(a) Determinare T^*, $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Ran} T$, $\|T\|$.
(b) Dimostrare che se $\operatorname{span}\{(u_k)_{k=1}^n\} \perp \operatorname{span}\{(w_k)_{k=1}^n\}$ allora $T^2 = 0$

(7) Sia P una proiezione ortogonale. Trovare una proiezione ortogonale R su V tale che $\operatorname{Ran} R = (\operatorname{Ran} P)^\perp$. ($R$ deve essere data in funzione di P)

(8) Siano P, Q proiezioni ortogonali nello spazio di Hilbert V. Dimostrare che

(a) se $PQ = 0$ allora $QP = 0$
(b) se $PQ = 0$ allora $P + Q$ è una proiezione ortogonale

(9) Sia $L = C_2[0,1]$ e $W = \operatorname{span}\{1, x^2\}$. Determinare $\operatorname{Ker} \pi_W$ e $\operatorname{Ran} \pi_W$

(10) Sia T l'operatore lineare su $C_2([-1,1];\mathbb{C})$ definito da $Tf(x) = x^2 f(x)$. Calcolare $\|T\|$, gli autovalori e lo spettro continuo di T.

(11) Nello spazio $(C([0,2];\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ consideriamo l'operatore

$$(Tf)(x) := g(x)\, f(x) \qquad \text{in cui} \qquad g(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

Determinare gli autovalori e lo spettro continuo di T.

(12) Nello spazio di Banach $C_b(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (le funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ a valori complessi) con norma $\|f\|_u := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, si consideri l'operatore (di inversione spaziale)

$$(Tf)(x) := f(-x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Determinare $\|T\|$, l'insieme degli autovalori $\sigma_p(T)$ e lo spettro continuo $\sigma_c(T)$.

(13) Data la funzione $W \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sia T l'operatore lineare su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definito come

$$Tf := \Delta f - \nabla W \cdot \nabla f\,.$$

Dimostrare che l'operatore trasformato $\widehat{T} := e^{-W/2} T e^{W/2}$ è un operatore di Schrödinger, vale a dire può essere scritto nella forma $\widehat{T} = \Delta - V(x)$. Determinare la funzione V in termini di W.

☞ Più o meno svolto nei Rudimenti o sul sito

Operatori Lineari/4

(1) Sia ϑ_+ l'operatore di traslazione a destra che agisce in $\ell_2(\mathbb{C})$. Dimostrare che

  (1) ϑ_+ non ha autovalori
  (2) $\sigma(\vartheta_+) = \overline{B_1} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

(2) Sia ϑ_- l'operatore di traslazione a sinistra che agisce in $\ell_2(\mathbb{C})$. Determinare gli autovalori e lo spettro continuo di ϑ_-.

  Risp: $\sigma_p(\vartheta_-) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(\vartheta_-) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$

(3) Dimostrare la *prima formula dei risolventi*: sia $T \in \mathcal{L}(V)$, dove V è uno spazio di Banach. Se $\alpha, \beta \in \rho(T)$ allora vale

$$R_\alpha(T) - R_\beta(T) = (\beta - \alpha)\, R_\alpha(T) R_\beta(T)\,.$$

(4) Sia V uno spazio euclideo complesso e sia $T \in \mathcal{L}(V)$. Dimostrare che

  (1) $\sigma(T^*) = \{\bar{z} : z \in \sigma(T)\}$
  (2) $R_z(T)^* = R_{\bar{z}}(T)$ per ogni $z \in \rho(T)$

(5) Sia T l'operatore che agisce in ℓ_2 come

$$Tx = \left(0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \ldots\right)$$

  (a) Determinare $\|T\|$
  (b) Dimostrare che T è compatto
  (c) Trovare gli autovalori e lo spettro continuo di T

  Risp: (a) $\|T\| = 1/2$. (c) T non ha autovalori. $\sigma_c(T) = \{0\}$ poichè T non è suriettivo.

(6) Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(x_1, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_4}{4}, \ldots\right)$$

  (a) Determinare $\|T\|$
  (b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$
  (c) Dimostrare che T è compatto
  (d) Trovare gli autovalori e lo spettro continuo di T (sugg: ricorda il teorema di Fredholm)

  Risp: $\|T\| = \sqrt{2}$, $\sigma_p = \{1\}$, $\sigma_c = \{0\}$.

☞ (7) Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(\frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_6}{6}, 0, \frac{x_8}{8}, 0, \ldots\right)$$

  (a) Determinare $\|T\|$
  (b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$
  (c) Trovare gli autovalori e lo spettro continuo di T (sugg: dato che T è compatto si può utilizzare il teorema di Fredholm)

(8) Trovare gli autovalori dell'operatore $T := -D^2 = -d^2/dx^2$ nei due casi

  (a) $T : C_0^\infty[0, L] \mapsto C^\infty[0, L]$ (Laplaciano di Dirichlet).
  (b) $T : C_N^\infty[0, L] \mapsto C^\infty[0, L]$ in cui $C_N^\infty[0, L]$ è l'insieme delle funzioni $f \in C^\infty[0, L]$ tali che $f'(0) = f'(L) = 0$ (Laplaciano di Neumann).