1 Numeri complessi

Es 1.1. *Calcolare*

$$(a)\quad (5+3i)+((-1+2i)+(7-5i)) \qquad (b)\quad (2-3i)(4+2i)$$

$$(c)\quad \frac{6-4i}{-1+i} \qquad (d)\quad \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} \qquad (e)\quad \operatorname{Re}\frac{1+9i}{i} \qquad (f)\quad \operatorname{Im}\frac{i}{1+4i}$$

Soluzione (a) 11 (b) $14-8i$ (c) $-5-i$ (d) $1+i$ (e) 9 (f) 1/17

Es 1.2. *Calcolare*

$$(a)\quad |3(2+i)-4(3-2i)| \qquad (b)\quad \left(\overline{3-2i}\right)^4 \qquad (c)\quad \left|\frac{3-2i}{-1+i}\right|$$

$$(d)\quad \operatorname{Re} i^{1718} \qquad (e)\quad \operatorname{Im}\left|\left(\frac{1+9i}{i}\right)^{\frac{i}{1+9i}}\right| \qquad (f)\quad \operatorname{Im}\frac{2+i}{2-i}$$

Soluzione (a) $\sqrt{157}$ (b) $-119+120i$ (c) $\sqrt{13/2}$ (d) -1 (e) 0 (f) 4/5

Es 1.3. *Dimostrare per induzione che*

$$(a)\quad |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1||z_2|\dots|z_n| \qquad n=2,3,\dots$$

$$(b)\quad \overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}\dots\overline{z_n} \qquad n=2,3,\dots$$

Es 1.4. *Descrivere e disegnare l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$(a)\quad 5 < |z-3+i| \le 9 \qquad (b)\quad \left|\sqrt{2}z-5i\right| < 1 \qquad (c)\quad |z-1| = |z+i|$$

Es 1.5. *Dimostrare per induzione che*

$$|z_1+z_2+\dots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n| \qquad n=2,3,\dots$$

Es 1.6. *Dimostrare che, se $|z|=10$, allora*

$$(a)\quad 98 \le \left|z^2-2i\right| \le 102 \qquad (b)\quad \left|\frac{z^2-20i}{z^3+5iz^2+20}\right| \le \frac{1}{4}$$

Es 1.7. *Dimostrare che, se $|z|=2$, allora*

$$\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \le \frac{1}{3}$$

Es 1.8. *Rappresentare geometricamente le seguenti operazioni*

$$(a)\quad (3+i)+(4-i) \qquad (b)\quad (2+i)-(3+3i) \qquad (c)\quad (5+2i)+\overline{(5+2i)}$$

Es 1.9. *Dimostrare algebricamente e geometricamente che $\forall z \in \mathbb{C}$*

$$\sqrt{2}|z| \ge |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

Es 1.10. *Calcolare parte reale e immaginaria dei seguenti numeri*

$(a)\ \ 5e^{i\pi/3} \qquad (b)\ \ 2ie^{i13\pi/4} \qquad (c)\ \ 5e^{-i2\pi/3} \qquad (d)\ \ (1+i)^{20}$

$(e)\ \ (1+i)^5(\sqrt{3}+i)^3 \qquad (f)\ \ (1-i\sqrt{3})^{100} \qquad (g)\ \ (1+2i)^5$

Soluzione (a) $(5/2, 5\sqrt{3}/2)$ (b) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (c) $(-5/2, -5\sqrt{3}/2)$ (d) $(-1024, 0)$ (e) $(32, -32)$ (f) $(-2^{99}, \sqrt{3}2^{99})$ (g) $(41, 38)$

Es 1.11. *Esprimere le seguenti quantità in funzione di* $\sin\theta$ *e* $\cos\theta$

$(a)\ \ \cos(3\theta) \qquad (b)\ \ \sin(4\theta) \qquad (c)\ \ \cos(5\theta)$

Soluzione (a) $-\cos\theta + 2\cos\theta\cos(2\theta)$ (b) $4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$ (c) $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

Es 1.12. *Trovare due numeri complessi* z_1 *e* z_2 *tali che*

$(a)\ \ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

$(b)\ \ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

Es 1.13. *Dimostrare l'identità*

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad (z \neq 1)$$

e usarla per derivare l'identità trigonometrica di Lagrange

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)} \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

Es 1.14. *Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano complesso*

$(a)\ \ z^2 = 1 \qquad (b)\ \ z^3 = i \qquad (c)\ \ z^5 = 1+i \qquad (d)\ \ z^4 = 1 - i\sqrt{3}$

$(e)\ \ 2z^7 + 3iz = 0 \qquad (f)\ \ z^6 + 2z^3 + 1 = 0 \qquad (g)\ \ \left|z^2 - 2i\right| = 4$

Soluzione (a) $z = \pm 1$ (b) $z = e^{i(\pi/6 + 2\pi k/3)},\ k = 0,1,2$ (c) $z = \sqrt[10]{2}e^{i(\pi/20 + 2\pi k/5)},\ k = 0,1,2,3,4$ (d) $z = \sqrt[4]{2}e^{i(-\pi/12 + \pi k/2)},\ k = 0,1,2,3$ (e) $z = 0,\ z = \sqrt[6]{3/2}e^{i(-\pi/12 + \pi k/3)},\ k = 0,1,2,3,4,5$ (f) $z = e^{i(\pi/3 + 2\pi k/3)},\ k = 0,1,2$

Es 1.15. *Calcolare il valore numerico di* $\cos(3\arctan 2)$.

Soluzione $-11/(5\sqrt{5})$

Es 1.16. *Supponendo che* $z^n = 1$, *calcolare al variare di* k *la somma*

$1 + z^k + z^{2k} + \ldots + z^{(n-1)k} \qquad k$ *intero positivo*

Es 1.17. *Descrivere e disegnare l'insieme dei punti* $z \in \mathbb{C}$ *tali che*

$(a)\ \ \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| \leq \frac{\pi}{4} \qquad (b)\ \ 1 \leq |z+i| \leq 2 \qquad (c)\ \ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$

$(d)\ \ \frac{\pi}{4} \leq \arg(z+i) \leq \frac{\pi}{2} \qquad (e)\ \ \mathrm{Re}\, z^2 \geq \mathrm{Im}\, z^2$