Funzionali lineari/1

(1) Dimostrare che se uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ ammette una base numerabile allora è separabile.

(2) Nei casi seguenti dire se $F \in L^*$. Nel caso di risposta negativa giustificare la propria affermazione

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3$ [S]
(b) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2 - x_3$ [S]
(c) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2$ [S]
(d) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = |x_1| + 2|x_2| + |x_3|$ [N]
(e) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 1$ [N]
(f) $L = \ell_1$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i$ [S]
(g) $L = \ell_1$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_{5i}$ [S]
(h) $L = \ell_1$, $F(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$ [S]
(i) $L = \ell_1$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty i\, x_i$ [N]
(j) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i/i$ [N]
(k) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i/i^2$ [S]
(l) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$ [N]
(m) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \limsup_{i\to\infty} x_i$ [N]
(n) $L = \ell_0$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i$ [N]
(o) $L = \ell_0$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{x_i}{\sqrt{i}}$
(p) $L = \ell_2$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i$
(q) $L = \ell_2$, $F(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{x_i}{i}$

(3) Calcolare la norma del funzionale lineare δ_a, con $a \in \mathbb{R}$ che agisce sullo spazio normato $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$.

(4) Dimostrare che la delta di Dirac δ_a, nello spazio $(C_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, è un funzionale lineare *non* limitato.

(5) Sia $a \in \ell_2$ e sia $\varphi_a : \ell_2 \mapsto \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \qquad x \in \ell_2$$

Dimostrare che φ_a è un funzionale lineare continuo in ℓ_2 e che $\|\varphi_a\| = \|a\|_2$.

(6) Sia $a \in \ell_1$ e sia $\varphi_a : \ell_\infty \mapsto \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \qquad x \in \ell_\infty$$

Dimostrare che φ_a è un funzionale lineare continuo in ℓ_∞ e che $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$.

(7) Data la successione $a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$, determinare la norma del funzionale lineare φ_a, definito come $\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^\infty a_k x_k$, quando φ_a agisce: (1) sullo spazio ℓ_1; (2) sullo spazio ℓ_∞; (3) sullo spazio ℓ_3. Fornire semplicemente la formula utilizzata per la risposta e il valore numerico di $\|\varphi_a\|$, senza dimostrazione.

☞ (8) Nello spazio ℓ_p consideriamo il funzionale lineare φ_a definito come

$$\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^\infty a_i x_i\,.$$

Sia $q := p/(p-1)$, in modo tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e sia $a \in \ell_q$.

(1) Dimostrare che il funzionale lineare φ_a è ben definito su ℓ_p, vale a dire la sommatoria è convergente per ogni $x \in \ell_p$
(2) Dimostrare che il funzionale lineare φ_a è limitato su ℓ_p e trovare un limite superiore alla norma di φ_a
(3) Dimostrare che $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

☞ (9) Nello spazio normato $(\ell_0, \|\cdot\|_\infty)$ sia $\varphi_a : \ell_0 \mapsto \mathbb{R}$ definito come $\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^\infty a_i x_i$. Dimostrare che se $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, allora

(a) φ_a è un funzionale lineare continuo su ℓ_0.
(b) $\|\varphi_a\| = \|a\|_1 := \sum_{k=1}^\infty |a_k|$
(c) (Facoltativo). Se F è funzionale lineare continuo su ℓ_0 allora esiste $a \in \ell_1$ tale che $F = \varphi_a$.

☞ Più o meno svolto nei Rudimenti o sul sito

Funzionali lineari/2

(1) Nei casi seguenti dire se $F \in L^*$. Nel caso di risposta negativa giustificare la propria affermazione

- (a) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \limsup_{i\to\infty} x_i$ [N]
- (b) $L = \ell_0$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ [N]
- (c) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$ [N]
- (d) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ [S]
- (e) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \arctan(x)\, f(x)\, dx$ [S]
- (f) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ [N]
- (g) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx$ [N]
- (h) $L = C_2(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ [N]
- (i) $L = C_2(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x}\, dx$ [N]
- (j) $L = C_2(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+|x|}\, dx$ [S]

(2) Sia F il funzionale lineare definito come $F(f) := \int_{-1}^{1} x\, f(x)\, dx$. Calcolare $\|F\|$ quando F agisce: (a) su $(C[-1,1]\,, \|\cdot\|_1)$, (b) su $(C[-1,1]\,, \|\cdot\|_2)$, (c) su $(C[-1,1]\,, \|\cdot\|_u)$.

(3) Sia F il funzionale lineare definito come

$$F(f) := \int_0^{2\pi} \sin x\, f(x)\, dx\,.$$

Calcolare $\|F\|$ quando F agisce sullo spazio $C[0, 2\pi]$ dotato della norma (a) $\|\cdot\|_1$, (b) $\|\cdot\|_2$, (c) $\|\cdot\|_{4/3}$, (d) $\|\cdot\|_u$.

Risp: (a) 1, (b) $\sqrt{\pi}$, (c) $\sqrt[4]{3\pi/4}$.

(4) Calcolare la norma del funzionale lineare $F(f) := f(0) - f(1)$ che agisce sullo spazio $(C[0,1]\,, \|\cdot\|_u)$.

Risp: 2.

(5) Nei casi seguenti dire se F è una distribuzione su $\mathcal{K}$. Nel caso di risposta negativa giustificare la propria affermazione

- (a) $F(f) = f(0) + f(1)$ [S]
- (b) $F(f) = f(0)\, f(1)$ [N]
- (c) $F(f) = 5f(0) + 2f(1)$ [S]
- (d) $F(f) = 5f(0) + 2f(1) + 3$ [N]
- (e) $F(f) = |f(0)|$ [N]
- (f) $F(f) = f''(2) - f'(5) + f(0)$ [S]
- (g) $F(f) = f''(2) - f'(5) + f(0) + 1$ [N]
- (h) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x)\, dx$ [S]
- (i) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{-1} f(x)\, dx$ [N]
- (j) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{-1/4} f(x)\, dx$
- (k) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{-1/2} f(x)\, dx$ [S]
- (l) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{-3/2} f(x)\, dx$
- (m) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \log|x| f(x)\, dx$ [S]
- (n) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} f(x)\, dx$
- (o) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{|x|}\, f(x)\, dx$
- (p) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^4}{1+x^2}\, f(x)\, dx$
- (q) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} (\log|x|)^{100}\, f(x)\, dx$
- (r) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} (\log|x|)^{100}\, |f(x)|\, dx$
- (s) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx$
- (t) $F(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$
- (u) $F(f) = f(0) + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$

(6) Una funzione $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ è detta *a gradino* se esistono $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}$ tali che $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{t-1} < \alpha_t = 1$ e f è costante su ogni intervallo $[\alpha_i, \alpha_{i+1})$. Dimostrare che per ogni $g \in C[0,1]$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste f a gradino tale che $\|f - g\|_u < \varepsilon$. Dimostrare che, viceversa, se f è una funzione a gradino fissata, allora comunque si scelga $g \in C[0,1]$ si ha sempre $\|f - g\|_u \geq \ldots$. (Morale: con le funzioni a gradino si approssimano le funzioni continue ma non viceversa nella norma uniforme).

Funzionali lineari/3

☞ (1) Dimostrare che $P(1/x)$ continuo su $\mathcal{K}$, vale a dire che se $f_n \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ allora $P(1/x)(f_n) \to P(1/x)(f)$.

(2) Sia $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dimostrare le seguenti identità

$$\begin{aligned} h\delta_0 &= h(0)\delta_0 \\ h\delta_0' &= h(0)\delta_0' - h'(0)\delta_0 \\ h\delta_0'' &= h(0)\delta_0'' - 2h'(0)\delta_0' + h''(0)\delta_0 \end{aligned}$$

Generalizzare:

$$h\delta_0^{(n)} = \,?$$

Applicare le formule precedenti per calcolare

$$x^2\delta_0^{(3)} \qquad x^3\delta_0'' \qquad x^2\delta_0'' \qquad e^x\delta_0''$$

(3) Dimostrare che

(1) $x^n\delta_0^{(n)} = (-1)^n n!\,\delta_0$
(2) se $p > n$ allora $x^p\delta_0^{(n)} = 0$.

(4) Sia $f \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ è lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili su $\mathbb{R}$ a supporto compatto). Calcolare

(a) $(x^{100}\,\delta_0^{(50)})(f)$ $\qquad (b)$ $(\sin x\,\delta_0)(f)$ $\qquad (c)$ $(x^2\,\delta_5')(f)$
(d) $(\cos x\,\delta_0'')(f)$ $\qquad (e)$ $(x\,P(1/x))(f)$

(5) Sia $f \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ è lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili su $\mathbb{R}$ a supporto compatto). Calcolare

(a) $(e^{2x}\,\delta_0'')(f)$ $\qquad (b)$ $(\sin x\,\delta_0')(f)$ $\qquad (c)$ $(x^5\,\delta_1')(f)$ $\qquad (d)$ $(x^2\,P(1/x))(f)$

(6) Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che la derivata nel senso delle distribuzioni di $g(|x|)$ è data da $g'(|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$.

☞ (7) Dimostrare che $(\log|x|)' = P(1/x)$, vale a dire, più precisamente che $\varphi_{\log|x|}' = P(1/x)$, in cui $\varphi_{\log|x|}$ è la distribuzione

$$\varphi_{\log|x|}(f) := \int_{\mathbb{R}} \log|x|\,f(x)\,dx$$

☆ (8) Dimostrare che $P(1/x)' = -P(1/x^2)$ in cui

$$P(1/x^2)(f) := \lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2}\,dx\,.$$

☞ (9) Calcolare le distribuzioni

(a) $D[\,\mathrm{sgn}(x)\,e^{-|x|}\,]$ $\qquad (b)$ $D[\,\mathrm{sgn}(x)\ \mathrm{sgn}(x-1)\,]$ $\qquad (c)$ $x\,(\mathrm{sgn}\,x)'$
(d) $x\,(\mathrm{sgn}(x+2))'$ $\qquad (e)$ $\sin(x)\,|x|''$ $\qquad (f)$ $D\lfloor x\rfloor$

☞ (10) Calcolare le seguenti distribuzioni ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

(a) $e^{3x}\,\delta_0''$ $\qquad (b)$ $\sin x\,|x|'''$ $\qquad (c)$ $D\big[\,xP(1/x)\,\big]$ $\qquad (d)$ $D\big[\,x\lfloor x\rfloor\,\big]$

(11) Calcolare le seguenti distribuzioni ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

(a) $D\big[\mathrm{sgn}\,x\,\cos x\big]$ $\qquad (b)$ $x\,\cos x\,\delta_0''$ $\qquad (c)$ $x^{10}\,\delta_0^{(4)}$ $\qquad (d)$ $D\big[\sin(\pi x)\,\lfloor x\rfloor\,\big]$

☞Più o meno svolto nei Rudimenti o sul sito

Funzionali lineari/4

(1) Sia $f \in \mathcal{K}$. Calcolare:

$$(a)\ \ \delta[x^3 - 1](f) \qquad\qquad (b)\ \ \delta[\sin x](f) \qquad\qquad (c)\ \ \delta[e^{-x^2}](f)$$

(2) Verificare che in $\mathbb{R}^2$ vale la seguente identità nel senso delle distribuzioni

$$\Delta \log |x| = 2\pi\delta(x)\,.$$

☞ (3) (Potenziali ritardati). Sia $\rho \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ e sia

$$f(x,t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(u, t - |x-u|)}{|x-u|}\, du \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}$$

in cui $|x-u|$ è la usuale distanza in $\mathbb{R}^3$ data da $|x-u| := \left(\sum_{i=1}^3 |x_i - u_i|^2\right)^{1/2}$. Dimosrtare che f soddisfa l'equazione

$$\left[\,\partial_t^2 - \Delta\,\right] f(x,t) = 4\pi\rho(x,t)$$

in cui

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$ ①

(4) Calcolare le distribuzioni

$$(a)\quad xP(1/x) \qquad\quad (b)\quad x^2P(1/x) \qquad\quad (c)\quad x\,(\operatorname{sgn} x)' \qquad\quad (d)\quad x\,(\operatorname{sgn}(x+2))'$$

(5) Dimostrare che la funzione

$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

è infinitamente derivabile e a supporto compatto. (Sugg: l'unico problema è quello di dimostrare che la derivata n–sima $h^{(n)}$ è continua nei punti di raccordo -1 e 1. Nel punto $x = 1$, ad esempio, si ha che $\lim_{x\to 1^+} h^{(n)}(x) = 0$. Bisogna quindi far vedere che il $\lim_{x\to 1^-} h^{(n)}(x) = 0$).

(6) Tradurre le seguenti affermazioni usando solamente i quantificatori universali $\forall$, $\exists$ e variabili indeterminate come ε, δ, M, K, ... in particolare non si possono usare le parole e i simboli che appaiono fra parentesi quadre. Nel seguito (a_n) è una successione di numeri reali, f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, F è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale normato V.

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$
(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
(c) Non è vero che $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$
(d) (a_n) è una successione di Cauchy [lim, convergente]
(e) (a_n) non è una successione di Cauchy [lim, convergente]
(f) $\sup_n a_n > 3$
(g) $\sup_n a_n \geq 3$
(h) $\sup_n a_n \leq 3$
(i) $\sup_n a_n = \infty$
(j) $\sup_n a_n < \infty$
(k) $\limsup a_n > 3$
(l) f è continua nel punto $x = a$ [lim]
(m) f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ [lim]
(n) F è limitato [sup, continuo]
(o) F non è limitato [sup, continuo]

(Esempio: (6f) $\exists n$ tale che $a_n > 3$, (6g) $\forall\varepsilon > 0\ \exists n$ tale che $a_n > 3 - \varepsilon$).