EQUIVALENZA DELLE NORME SU $\mathbb{R}^n$

Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, lo spazio delle n-ple ordinate, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, abbiamo introdotto, per ogni $p \in [1, +\infty[$, la funzione $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$(1) \qquad ||x||_p \doteq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p},$$

che abbiamo mostrato essere una *norma* su $\mathbb{R}^n$. Inoltre, per $p = \infty$, abbiamo definito

$$(2) \qquad ||x||_\infty \doteq \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i|\},$$

anch'essa norma su $\mathbb{R}^n$. In particolare, nel caso $p = 2$, recuperiamo la normale norma euclidea, che corrisponde alla distanza (euclidea) del punto x dall'origine in $\mathbb{R}^n$, pensato come spazio metrico, $(\mathbb{R}^n, d(x, y))$.

Definizione 0.1. Dato uno spazio vettoriale normato, $(V, ||\cdot||)$, due norme, $||\cdot||_a$ e $||\cdot||_b$, sono dette equivalenti se

$$\exists m, M > 0 : m\,||x||_a \leq ||x||_b \leq M\,||x||_a\, \forall x \in V.$$

La relazione "essere equivalenti", come suggerisce il nome stesso, è una *relazione di equivalenza*[1].

Infatti, la prima proprietà è evidente, basta considerare $m = M = 1$. La seconda discende dall'osservazione che, se $m\,||x||_a \leq ||x||_b$ e $||x||_b \leq M\,||x||_a$, allora

$$\forall x \in V, \exists m, M > 0 : \frac{1}{M}\,||x||_b \leq ||x||_a \leq \frac{1}{m}\,||x||_b\,.$$

Ed infine la transitività si ottiene perché dall'equivalenza di $||\cdot||_a$ e $||\cdot||_b$ e da quella di $||\cdot||_b$ e $||\cdot||_c$, *i.e.*

$$m\,||x||_a \leq ||x||_b \leq M\,||x||_a \text{ e } m'\,||x||_c \leq ||x||_b \leq M'\,||x||_c\,,$$

si ha che

$$mm'\,||x||_a \leq ||x||_c \leq MM'\,||x||_a\,,$$

ovvero che $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_c$. □

Come risultato preliminare, mostriamo che nello spazio $\mathbb{R}^n$, la norma $||\cdot||_\infty$ si merita il nome che le abbiamo dato, ovvero che sussiste la seguente

Proposizione 0.2. *Vale il seguente limite*

$$\lim_{p\to\infty} ||\cdot||_p = ||\cdot||_\infty\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[1]Ricordo che una relazione di equivalenza, che indichiamo con $\sim$, è una relazione binaria tra gli elementi di un insieme X che sia riflessiva, simmetrica e transitiva, ovvero che, $\forall x, y, z \in X$,

1. $x \sim x$,
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Dimostrazione. Presa una qualunque n-pla in $\mathbb{R}^n$, la sua norma-infinito risulta essere

$$||x||_\infty = \max\{|x_i|\,; i = 1, 2, \ldots, n\} = |x_{i_0}|\,,$$

per un particolare valore $\imath_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. In altre parole, il massimo tra gli $|x_i|$ esiste (ovviamente) ed assumiamo che sia assunto per $i = i_0$. Da questo discende che, per ogni $p \geq 1$,

$$||x||_\infty^p = |x_{i_0}|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{i_0}|^p = n\,|x_{i_0}|^p = n\,||x||_\infty^p\,.$$

Quindi, prendendo le radici p-esime dovunque e ricordando la definizione di $||\cdot||_p$, abbiamo che

$$||x||_\infty \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} = ||x||_p \leq n^{1/p}\,||x||_\infty\,. \tag{3}$$

A questo punto, non resta altro che considerare il limite $p \to \infty$ per ottenere la tesi, dato che $n^{1/p} \to 1$. □

Dalla proposizione appena dimostrata è quasi immediato dimostrare l'equivalenza delle varie norme-p. Vale infatti la seguente

Proposizione 0.3. *Le norme $||\cdot||_p$ su $\mathbb{R}^n$, per $1 \leq p \leq +\infty$, sono fra loro equivalenti.*

Dimostrazione. Infatti, la (3) ci dice che

$$||x||_\infty \leq ||x||_p \leq n^{1/p}\,||x||_\infty\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, per qualunque $p \geq 1$, la norma $||\cdot||_p$ è equivalente alla norma $||\cdot||_\infty$. Discende infine dalla proprietà transitiva che per $p \neq q$ le norme $||\cdot||_p$ e $||\cdot||_q$ siano equivalenti. □

Più in generale, vale il seguente

Corollario 0.4. *Su $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono fra loro equivalenti.*

Non riportiamo la dimostrazione, ma sottolineiamo il fatto che questo risultato non sia valido nell'estensione infinito dimensionale di $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, vale a dire lo spazio

$$\ell_p \doteq \{x \in \mathbb{R}^\infty : \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{1/p} < +\infty\}.$$

dotato della norma $||x||_p \doteq [\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p]^{1/p}$.

Il risultato del Corollario 0.4 ci garantisce quindi che per studiare, ad esempio, la convergenza di una successione in $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ possiamo scegliere tra le norme che abbiamo introdotto su $\mathbb{R}^n$, quella che ci pare più opportuna.