

Carlo Presilla

Elementi di Analisi Complessa

Funzioni di una variabile

2^a edizione

 Springer

Carlo Presilla
Dipartimento di Fisica
Sapienza – Università di Roma
Roma, Italy

UNITEXT – La Matematica per il 3+2
ISSN versione cartacea: 2038-5722 ISSN versione elettronica: 2038-5757

ISBN 978-88-470-5500-1 ISBN 978-88-470-5501-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-5501-8
Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London

© Springer-Verlag Italia 2014

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Layout di copertina: Beatrice B., Milano

Impaginazione: PTP-Berlin, Protago $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Production GmbH, Germany (www.ptp-berlin.eu)
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI)

Springer fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Prefazione

La presente opera raccoglie gli argomenti di Analisi Complessa trattati nelle lezioni di *Modelli e Metodi Matematici della Fisica*, corso da me tenuto a partire dal 2003 all'Università di Roma "La Sapienza". È un testo adatto per una prima esposizione della teoria delle funzioni di singola variabile complessa e si rivolge a studenti di Fisica, Matematica e Ingegneria che abbiano acquisito le nozioni fondamentali dell'Analisi Matematica reale.

Esistono già molti trattati eccellenti sull'Analisi Complessa, per alcuni dei quali si rimanda alla Bibliografia allegata. L'esigenza di una nuova pubblicazione nasce dall'idea di effettuare una selezione di argomenti, ritenuti fondamentali, la cui esposizione risulti sistematica e autoconsistente in circa 60 ore di lezione mantenendo, al tempo stesso, il rigore matematico volto a favorire la maturazione scientifica dello studente e prepararlo alla lettura di testi avanzati.

A corredo della trattazione teorica vengono proposti oltre 200 esercizi, raccolti tra le prove scritte assegnate per il superamento del corso, tutti forniti di soluzione dettagliata. Il loro svolgimento costituisce una parte imprescindibile per l'acquisizione della materia.

È un piacere ringraziare Filippo Cesi per innumerevoli discussioni e suggerimenti.

Roma, gennaio 2011

Carlo Presilla

La seconda edizione presenta vari miglioramenti. Sono stati corretti numerosi errori tipografici, eliminate alcune imprecisioni/incongruenze e semplificate alcune dimostrazioni. Cruciali a questo scopo sono state le osservazioni degli studenti che hanno adottato la prima edizione del testo, ad essi va la mia gratitudine.

Sono stati aggiunti circa 50 nuovi esercizi e l'ordine di presentazione degli esercizi è stato rivisto in modo da rispecchiare quello degli argomenti teorici. Sono state introdotte figure tridimensionali per meglio visualizzare le linee di diramazione delle funzioni poldrome studiate. Ringrazio Rodolfo Guidotti per avermi segnalato un errore nella presentazione del Teorema 3.4 e avermi suggerito di approfondirne il contenuto con gli Esempi 3.5 e 3.6.

Roma, settembre 2013

Carlo Presilla

Indice

1	Numeri complessi	1
	1.1 Fondamenti assiomatici	1
	1.2 L'unità immaginaria	2
	1.3 Moduli e coniugati	3
	1.4 Disuguaglianza triangolare	3
	1.5 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	4
	1.6 Forma polare dei numeri complessi	4
	1.7 Radici di numeri complessi	6
	1.8 Regioni nel piano complesso	7
	1.9 Il piano complesso esteso	8
	Esercizi	9
2	Spazi metrici	13
	2.1 Distanza e spazi metrici	13
	2.2 Insiemi aperti e insiemi chiusi	14
	2.3 Spazi metrici connessi	18
	2.4 Convergenza di successioni	19
	2.5 Spazi metrici completi	21
	2.6 Spazi metrici compatti	22
	Esercizi	24
3	Limiti e continuità	27
	3.1 Limiti	27
	3.2 Continuità	31
	Esercizi	36
4	Successioni e serie di funzioni	39
	4.1 Successioni e serie di funzioni	39
	4.2 Limiti superiore e inferiore di una successione reale	42
	4.3 Serie di potenze	45
	Esercizi	48

5	Derivate e funzioni analitiche	53
5.1	Derivate di funzioni complesse	53
5.2	Equazioni di Cauchy-Riemann	56
5.3	Funzioni analitiche	58
5.4	Derivate di funzioni complesse di variabile reale	60
5.5	Trasformazioni conformi	61
	Esercizi	64
6	Funzioni elementari	67
6.1	Esponenziale	67
6.2	Logaritmo	69
6.3	Potenze con esponenti complessi	74
6.4	Esponenziali con base complessa	75
6.5	Funzioni trigonometriche	76
6.6	Funzioni iperboliche	79
6.7	Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse	81
	Esercizi	85
7	Integrali	89
7.1	Integrali di funzioni complesse di variabile reale	89
7.2	Cammini, tracce di cammini, curve	90
7.3	Integrali di funzioni complesse lungo curve regolari a tratti ...	93
7.4	Teorema di Cauchy-Goursat	100
7.5	Formula integrale di Cauchy	105
	Esercizi	110
8	Serie di Taylor e Laurent	115
8.1	Serie di Taylor	115
8.2	Serie di Laurent	123
8.3	Moltiplicazione e divisione di due serie di potenze	128
	Esercizi	131
9	Residui	135
9.1	Punti singolari isolati: residui	135
9.2	Classificazione delle singolarità isolate	138
9.3	Zeri delle funzioni analitiche	140
9.4	Zeri e poli	142
9.5	Comportamento in prossimità di singolarità isolate	143
	Esercizi	145
10	Applicazioni dei residui	149
10.1	Integrali impropri: convergenza e valore principale di Cauchy ..	149
10.2	Integrali di funzioni trigonometriche	150
10.3	Integrali di funzioni razionali	152
10.4	Integrali di funzioni razionali e trigonometriche	155

10.5	Cammini indentati intorno a un polo semplice	160
10.6	Cammini indentati intorno a un punto di diramazione	164
10.7	Cammini coincidenti con una linea di diramazione	166
10.8	Cammini vari	168
10.9	Integrali di Bromwich: trasformata inversa di Laplace	172
	Esercizi	174
11	Ulteriori proprietà delle funzioni analitiche	179
11.1	Prolungamento analitico	179
11.2	Principio del massimo modulo	185
11.3	Funzioni meromorfe	186
11.4	Funzioni armoniche	191
11.5	Metodo del punto di sella	193
	Esercizi	198
	Appendice A. Soluzione degli esercizi proposti	201
	Esercizi del Capitolo 1	201
	Esercizi del Capitolo 2	209
	Esercizi del Capitolo 3	214
	Esercizi del Capitolo 4	220
	Esercizi del Capitolo 5	233
	Esercizi del Capitolo 6	240
	Esercizi del Capitolo 7	261
	Esercizi del Capitolo 8	274
	Esercizi del Capitolo 9	295
	Esercizi del Capitolo 10	315
	Esercizi del Capitolo 11	347
	Riferimenti bibliografici	355
	Indice	357