

Carlo Presilla

Elementi di Analisi Complessa

Funzioni di una variabile



Springer

Carlo Presilla
Dipartimento di Fisica
Università di Roma “La Sapienza”

UNITEXT – La Matematica per il 3+2
ISSN print edition: 2038-5722

ISSN electronic edition: 2038-5757

ISBN 978-88-470-1829-7
DOI 10.1007/978-88-470-1830-3

e-ISBN 978-88-470-1830-3

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

© Springer-Verlag Italia 2011

Quest’opera è protetta dalla legge sul diritto d’autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall’art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all’utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L’utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Layout copertina: Beatrice G., Milano

Impaginazione: PTP-Berlin, Protago T_EX-Production GmbH, Germany (www.ptp-berlin.eu)
Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (Mi)

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano
Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Prefazione

La presente opera raccoglie gli argomenti di Analisi Complessa trattati nelle lezioni di *Modelli e Metodi Matematici della Fisica*, corso da me tenuto a partire dal 2003 all'Università di Roma "La Sapienza". È un testo adatto per una prima esposizione della teoria delle funzioni di singola variabile complessa e si rivolge a studenti di Fisica, Matematica e Ingegneria che abbiano acquisito le nozioni fondamentali dell'Analisi Matematica reale.

Esistono già molti trattati eccellenti sull'Analisi Complessa, per alcuni dei quali si rimanda alla bibliografia allegata. L'esigenza di una nuova pubblicazione nasce dall'idea di effettuare una selezione di argomenti, ritenuti fondamentali, la cui esposizione risulti sistematica e autoconsistente in circa 60 ore di lezione mantenendo, al tempo stesso, il rigore matematico volto a favorire la maturazione scientifica dello studente e prepararlo alla lettura di testi avanzati.

A corredo della trattazione teorica vengono proposti oltre 200 esercizi, raccolti tra le prove scritte assegnate per il superamento del corso, tutti forniti di soluzione dettagliata. Il loro svolgimento costituisce una parte imprescindibile per l'acquisizione della materia.

È un piacere ringraziare Filippo Cesi per innumerevoli discussioni e suggerimenti.

Roma, gennaio 2011

Carlo Presilla

Indice

1	Numeri complessi	1
1.1	Fondamenti assiomatici	1
1.2	L'unità immaginaria	2
1.3	Moduli e coniugati	3
1.4	Disuguaglianza triangolare	3
1.5	Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	4
1.6	Forma polare dei numeri complessi	4
1.7	Radici di numeri complessi	6
1.8	Regioni nel piano complesso	7
1.9	Il piano complesso esteso	8
	Esercizi	9
2	Spazi metrici	11
2.1	Distanza e spazi metrici	11
2.2	Insiemi aperti e insiemi chiusi	12
2.3	Spazi metrici connessi	16
2.4	Convergenza di successioni	18
2.5	Spazi metrici completi	19
2.6	Spazi metrici compatti	20
	Esercizi	22
3	Limiti e continuità	25
3.1	Limiti	25
3.2	Continuità	27
	Esercizi	33
4	Successioni e serie di funzioni	35
4.1	Successioni e serie di funzioni	35
4.2	Limiti superiore e inferiore di una successione reale	38
4.3	Serie di potenze	41
	Esercizi	44

5	Derivate e funzioni analitiche	47
5.1	Derivate di funzioni complesse	47
5.2	Equazioni di Cauchy-Riemann	50
5.3	Funzioni analitiche	52
5.4	Derivate di funzioni complesse di variabile reale	54
5.5	Trasformazioni conformi	55
	Esercizi	58
6	Funzioni elementari	59
6.1	Esponenziale	59
6.2	Logaritmo	60
6.3	Potenze con esponenti complessi	63
6.4	Esponenziali con base complessa	64
6.5	Funzioni trigonometriche	65
6.6	Funzioni iperboliche	67
6.7	Funzioni trigonometriche e iperboliche inverse	69
	Esercizi	71
7	Integrali	75
7.1	Integrali di funzioni complesse di variabile reale	75
7.2	Cammini, tracce di cammini, curve	76
7.3	Integrali di funzioni complesse lungo curve regolari a tratti ...	79
7.4	Teorema di Cauchy-Goursat	85
7.5	Formula integrale di Cauchy	90
	Esercizi	94
8	Serie di Taylor e Laurent	99
8.1	Serie di Taylor	99
8.2	Serie di Laurent	107
8.3	Moltiplicazione e divisione di due serie di potenze	112
	Esercizi	115
9	Residui	119
9.1	Punti singolari isolati: residui	119
9.2	Classificazione delle singolarità isolate	122
9.3	Zeri delle funzioni analitiche	124
9.4	Zeri e poli	126
9.5	Comportamento in prossimità di singolarità isolate	127
	Esercizi	129
10	Applicazioni dei residui	133
10.1	Integrali impropri: convergenza e valore principale di Cauchy ..	133
10.2	Integrali di funzioni trigonometriche	134
10.3	Integrali di funzioni razionali	136

10.4 Integrali di funzioni razionali moltiplicate per una funzione trigonometrica	139
10.5 Cammini indentati intorno a un polo semplice.....	144
10.6 Cammini indentati intorno a un punto di diramazione.....	147
10.7 Cammini coincidenti con una linea di diramazione	149
10.8 Cammini vari	152
10.9 Integrali di Bromwich: trasformata inversa di Laplace	156
Esercizi	158
11 Ulteriori proprietà delle funzioni analitiche	163
11.1 Prolungamento analitico.....	163
11.2 Principio del massimo modulo.....	169
11.3 Funzioni meromorfe.....	171
11.4 Funzioni armoniche	175
11.5 Metodo del punto di sella.....	177
Esercizi	183
Appendice. Soluzione degli esercizi proposti	185
Esercizi del Capitolo 1	185
Esercizi del Capitolo 2	192
Esercizi del Capitolo 3	196
Esercizi del Capitolo 4	199
Esercizi del Capitolo 5	211
Esercizi del Capitolo 6	215
Esercizi del Capitolo 7	233
Esercizi del Capitolo 8	246
Esercizi del Capitolo 9	267
Esercizi del Capitolo 10	283
Esercizi del Capitolo 11	311
Bibliografia	319
Indice analitico	321